分形之曼德勃罗集图象的精确计算与生成-C++/GMP实现和验证

网上有个程序backfract（链接在此Backfract。其作者还发布了一个 围棋程序前端cgoban，百度中搜backfract搜不到，搜cgoban可以搜到），用来显示分形中的曼德勃罗集。这个程序可以自动全屏显示Mandelbrot集的 区域图象，效果不错（我在此显示了一些效果图）。这个程序是运行在_nix/X上的。 网页上介绍其是“随机”选取“有趣的”区域进行显示，但不纯是放大，有时放大，有时接着又缩小。 一些视频网上也有称放大10的“N”次方倍的分形视频，视频放一会就没了。我想能否自己无穷放大，至少尽量放大。
数学上，Mandelbrot集有两种定义。 在《混沌分形及其应用》、《分形的计算机图象及其应用》中大致是这样说的: Mandelbrot集与另一种集合Julia集有联系。记以点c为参数的二次映射$f_c = z^2 + c$， 复平面任意一点c都各有相应的Julia集， 有的点c相应的Julia集是连通的，有的点c相应的Julia集是不连通的，从这有如下的Mandelbrot集的定义：

Mandelbrot集M是使c的f_c映射下的Julia集为连通的参数c的集合，即

$$M = \{c \in \mathbb{C} \mid J(f_c)\text{为连通的}\}$$

如果在复平面上把属于连通的Julia集的每个c都标绘出来，则此参数c的集合就是M集的分形图案。这个定义不好用计算机处理，幸好数学上 证明了Mandelbrot集的另一个等价的定义：

$$M = \left\{c \in \mathbb{C} \mid \lim_{n\to\infty} Z_n \nrightarrow \infty\right\}$$

其中：

$$Z_0 = 0$$
$$Z_{n+1} = Z_n^2 + c$$

在这个网页（The Mandelbrot Set）讲了一些实际绘制时的问题处理。
(1)判断无穷 数学上可以证明Mandelbrot集完全被包含在以原点为中心，半径为2的闭圆盘内，即：

$$M \subset \{c \in \mathbb{C} \mid |c| \leqslant 2\}$$

所以如果迭代中间结果模大于2了，则继续迭代肯定趋于无穷了。因此用模2作一个阈值。
(2)迭代次数 上述网页的作者用了个50次的例子。但我遇到过迭代50次与迭代200或1000次结果不同的情形。所以这个问题的数学根据我还不太清楚。
(3)着色 实际上Mandelbrot集只是中间那个（黑色）形状的部分。其外的点都不属于Mandelbrot集。简单地绘制一个属于或不属于的黑白图象 没太多好看。我们通常看到的的颜色丰富的各种细节有赖于着色。常见用“逃逸”的点的迭代次数取模来选取颜色。（另有的类似等高线绘制，这里不用。） 但简单的着色比不了象backfract这样的程序的效果。

（计算绘图窗口坐标(i, j)的点是否属于M集并着色的伪码）：

```
x0 = left_coord + delta* i;
y0 = above_coord - delta* j;
x = x0 ;        // or x = 0
y = y0 ;        // or y = 0
int k = 0 ;
while( k < MAX_ITERATION )
{
   real = x^2 - y^2 + x0;
   imag = 2xy + y0 ;
   |z|^2 = real*real + imag*imag ;
   if( |z|^2 > 4 )
      break;
   else{ x = real; y = imag; }
   k ++;
}
if( k < MAX_ITERATION )
   SetPixel(hdc, i, j , colors[ k %50]) ;
else
   SetPixel(hdc, i, j , RGB(0, 0, 0)) ;
```

一般的浮点运算有IEEE 754描述，计算机体系结构的书会涉及。还有书如《浮点计算编程原理、实现与应用》（刘纯根著）进行论述。网上有篇 著名的文章：What Every Computer Scientist Should Know About Floating-Point Arithmetic.

本文前后涉及3个程序：
第一个是用机器浮点double类型、VC++绘制Mandelbrot集；另可用“橡皮筋”选取区域放大各局部；
第二个在以上代码中加入作者float算法实现，比较上述机器浮点运算结果；但尚未修改完成“橡皮筋”选取放大功能；
第三个是未用图形界面，纯比较笔者float算法实现的计算结果和GMP分数运算结果的一致性的程序。
最初3个程序是在（虚拟机）Win XP + VC++6环境下开发的，后来升级到（虚拟机）Win7 + vs2015环境，有略微的修改。 这里两个版本都提供:
VC++6版本　　vs2015版本
（代码未加整理，:-()

第1个程序

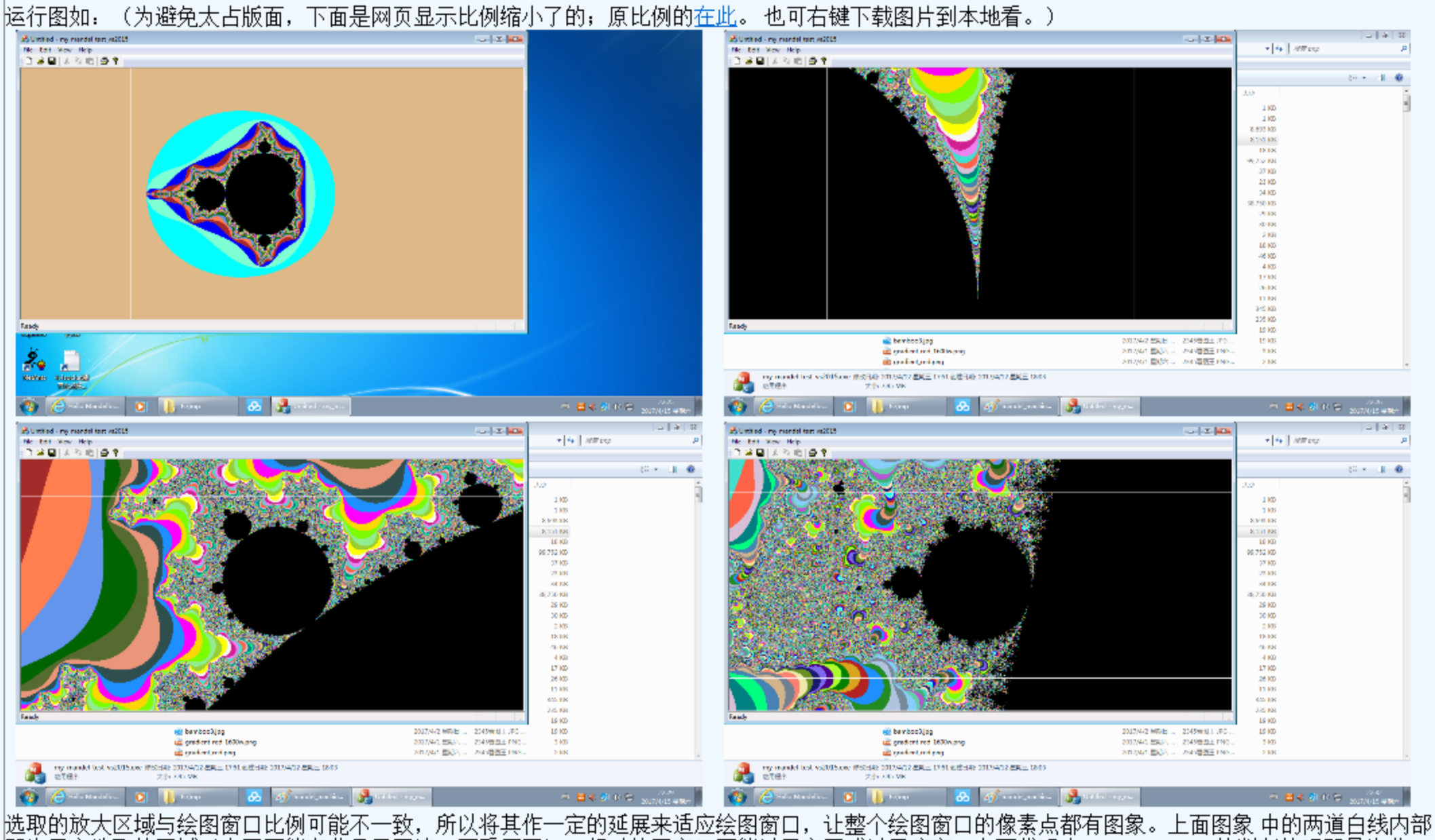
(1)double实现
这个运算部分代码和伪码差不多了：

my_mandel_test_3(machine_float)\my_mandel_testView.cpp:

```
for(i = 0; i < w; i++)
{
    for(j = 0; j < h; j++)
    {
        BOOL b_is_boundary = FALSE;
        if(delta_w > delta_h)
        {
            if(   j ==     (int)( (h*delta - (old_above_coordinate-      \
                                              old_below_coordinate))/(2*delta) )
              || j == ( h-(int)( (h*delta - (old_above_coordinate-      \
                                              old_below_coordinate))/(2*delta) ) )
              )
              b_is_boundary = TRUE;
        }
        else
        {
            if(    i ==     (int)( (w*delta - (old_right_coordinate-     \
                                               old_left_coordinate))/(2*delta) )
              || i == ( w-(int)( (w*delta - (old_right_coordinate-     \
                                               old_left_coordinate))/(2*delta) ) )
              )
              b_is_boundary = TRUE;
        }
```

```
            double x0 = left_coordinate  + delta * (double)i;
            double y0 = above_coordinate - delta * (double)j;
            double x  = x0;
            double y  = y0;

            int k = 0;
#define MAX_ITERATION 1000
            while(k < MAX_ITERATION)
            {
                double real_part      = x*x-y*y+x0;
                double imaginary_part = 2*x*y+y0;
                double z_abs_square = real_part*real_part + imaginary_part*imaginary_part;
                if(z_abs_square > 4.0)
                {
                    break;
                }
                else
                {
                    x = real_part;
                    y = imaginary_part;
                }
                k++;
            }
            if(k < MAX_ITERATION)
            {
                //unsigned long colors[16] =
                unsigned long colors[50] =
                {
                    RGB(0xDE , 0xB8 , 0x87),
                          ...
                    RGB(0x19 , 0x19 , 0x70 )

                };
                //SetPixel(hdc, i, j , colors[k%16]);
                SetPixel(hdc, i, j , colors[k%50]);
                if(b_is_boundary)
                    SetPixel(hdc, i, j , RGB(255, 255, 255));
            }
            else
            {
                SetPixel(hdc, i, j , RGB(0, 0, 0));
                if(b_is_boundary)
                    SetPixel(hdc, i, j , RGB(255, 255, 255));
            }
        }
    }
```

运行图如：（为避免太占版面，下面是网页显示比例缩小了的；原比例的在此。 也可右键下载图片到本地看。）



选取的放大区域与绘图窗口比例可能不一致，所以将其作一定的延展来适应绘图窗口，让整个绘图窗口的像素点都有图象。上面图象 中的两道白线内部即为用户选取的区域（小图可能有些显示不清，可看原图），相对绘图窗口可能过于扁平或过于瘦高。上面代码中 b_is_boundary的判断处理即是为此。（程序运行后产生两个中间文本文件draw_coordinates.txt和arguments.txt，下次运行前要把它们删去。）

机器浮点，二进制精度53位，相当于（十进制）小数点后约16位。起始坐标上下、左右均为约(-2,2)量级，若每次选取放大的 区域线度约为原图象的十分之一，那么可以发现大约16次后图象基本上就“马赛克”了。仅仅放大16次，离无穷放大太远了。 而且，后面还将看到机器浮点运算的误差累积在约40次迭代后就已出现明显差误的log记录。

第2个程序

(2) my floats实现

由于计算中仅用了乘法和加法，对有限位小数应该可以作完全精确的计算。按照小学运算的方法即可。为了只需计算有限位的小数， 只使用有限位的起始坐标和有限位的步进值，后者通过规定图象宽度高度为特定值，如500、512、800、1000、1024，从而像素代表的点 之间间距也由简单的有限位小数来表示。

所以我在View.cpp中修改了代码，只支持这些特定值。

my_mandel_test_my_floats_vs2015\my_mandel_test_my_floats_vs2015View.cpp:

```
if (!(w == 200 || w == 250 || w == 400 || w == 500
    || w == 800 || w == 1000 /*|| w == 1024*/)
    || !(h == 200 || h == 250 || h == 400 || h == 500
        || h == 800 || h == 1000 /*|| h == 1024*/)
    )

{
    AfxMessageBox(L"width and height not supported");
    return;
```

```
}

char* one_w_strI = (w == 200) ? "0.005" : (
    w == 250 ? "0.004" : (
        w == 400 ? "0.0025" : (
            w == 500 ? "0.002" : (
                w == 800 ? "0.00125" : (
                    w == 1000 ? "0.001" : ("error characters")
                    )
                )
            )
        )
    );

char* one_h_strI = (h == 200) ? "0.005" : (
    ...
```

读者可能还需在View.h中改代码，设置符合上述规定的合适你显示区域的程序窗口宽高：

my_mandel_test_my_floats_vs2015\my_mandel_test_my_floats_vs2015View.h:

```
#define DEFAULT_CLIENT_AREA_WIDTH   500//1000
#define DEFAULT_CLIENT_AREA_HEIGHT  250// 800
```

起始坐标则是x:-2.5到2.5，y:-2.0到2.0：

my_mandel_test_my_floats_vs2015\my_mandel_test_my_floats_vs2015View.h:

```
fI  fI_left_coord("-2.25");
fI  fI_right_coord("2.25");
fI  fI_above_coord("2.0");
fI  fI_below_coord("-2.0");
```

加入了实现my floats的三个新文件my_floats.h、my_floatI.cpp、my_floatII.cpp和几个辅助函数。（我在VC6编译项目时有时会报不通过， 把文件重新加入工程一次后又通过了，在vs2015上则完全通不过，报nafxcwd.lib/uafxcwd.lib与libcmtd.lib中有重复定义。遇到这种情况 可能得调整一下工程，在项目的link选项的input栏中先忽略这两个库，然后在其他依赖库中按如上先后顺序加入这两个库。） 我先后用了 两种数据结构来实现float数类，由于实现了前一种后想到后一种可能更好，所以先后完成了两种实现。

实现一：

my_floats.h:

```
class float_number{
public:
   bool   minus;
   char*  number;  //in absolute value form
   int    point_pos;

   ...
};
```

实现二：

my_floats.h:

```
class floatII{
public:
   bool  minus;         //with '-' sign?
   char* digits;        //no '.' inside
   int   point_pos_r;   //counting from the right side

   ...
};
```

有时简记为：

my_mandel_test_my_floats_vs2015\my_mandel_test_my_floats_vs2015View.cpp:

```
typedef float_number fI;
typedef floatII      fII;
```

两者都用单独的成员minus表示正负，所以数字字符串（number或digits）中都不再带符号。区别一是实现前一种时数字字符串中还保留着小数点， 这在后者中去掉了；区别二是小数点的位置，前者是从左到右数的（point_pos），后者则改为从右往左数了（point_pos_r）。由此代码实现起来 后一种简洁一点。这两种实现可以互相比较结果，进行验证。这是验证的方法之二。不过这两者的算法核心是一样的代码，所以可能验证的功能因此有限。 完全的验证还有赖于下面第3个实现了与GMP计算结果对照的程序，作为验证的方法之三，也可以说是真正的验证。（验证方法一是一种局部的验证， 只验证加法，即在作加法后作逆运算回去，看结果是否正确还原。这个没怎么用。）

实现了float类，以fI实现为例，运算代码变成了大致这样子：（实际的代码由于要相互比较，代码间会互相穿插。这里以早期代码版本为例。）

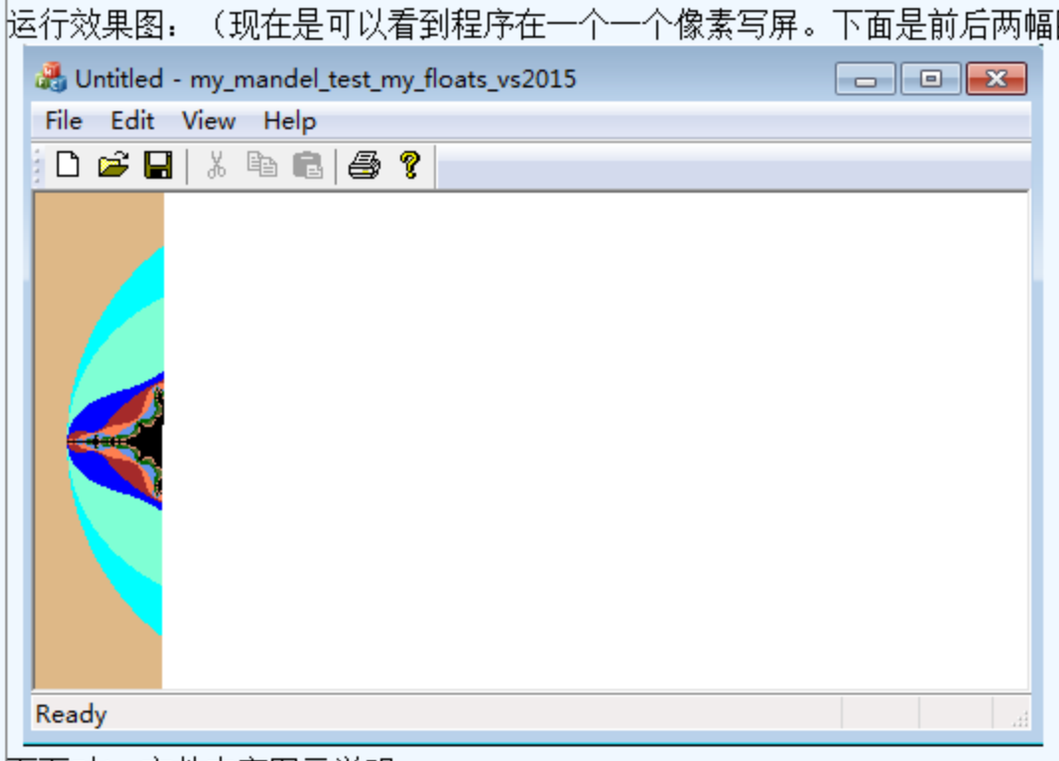
my_mandel_test_my_floats_0\my_mandel_testView.cpp:

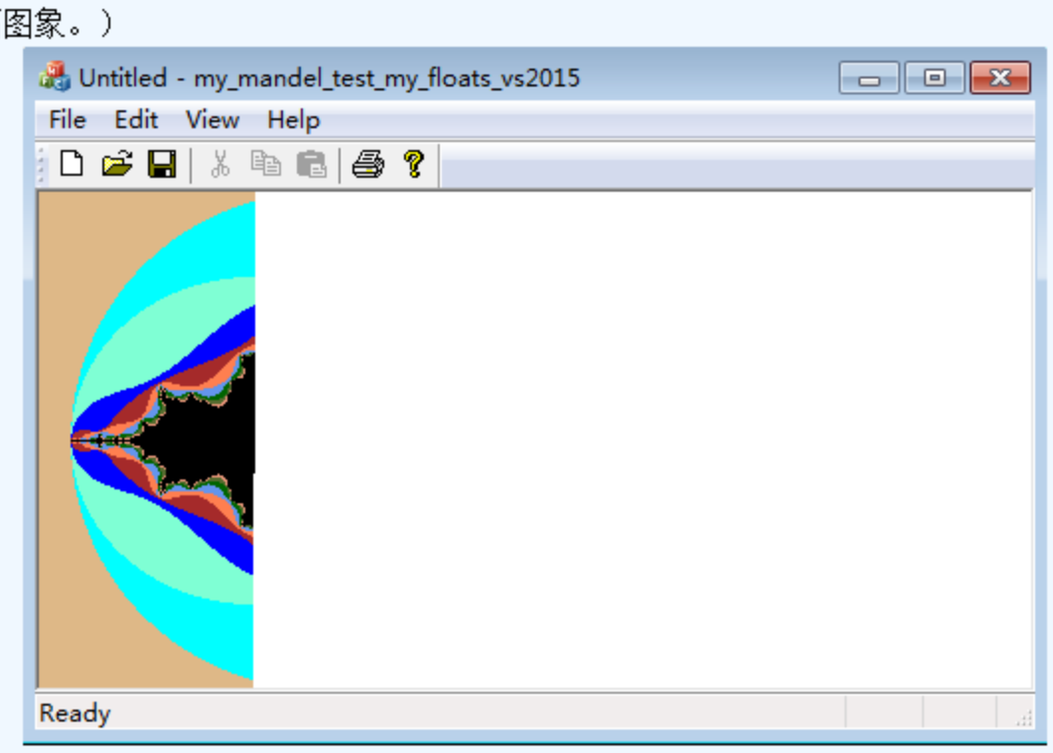
```
fI  fI_left_coord ("-2.25");
fI  fI_right_coord( "2.25");
fI  fI_above_coord( "2.0" );
fI  fI_below_coord("-2.0" );

fI delta_wI, delta_hI, deltaI;

#if 1
fI w_factorI(one_w_strI);
fI h_factorI(one_h_strI);

delta_wI = (fI_right_coord - fI_left_coord ) * w_factorI;
delta_hI = (fI_above_coord - fI_below_coord) * h_factorI;

if(delta_wI > delta_hI)
    deltaI = delta_wI;
else
    deltaI = delta_hI;
#endif

#if 1
fI  x0I(fI_left_coord );
fI  y0I(fI_above_coord);
fI  aI("2");
fI  threshold("4.0");
#endif

#if 1
    for(i = 0; i < w; i++)
    {
        y0I = fI_above_coord;
        for(j = 0; j < h; j++)
        {
```

```
            fI  xI("0");
            fI  yI("0");

            int k = 0;
#define MAX_ITERATION  10//20//100
            while(k < MAX_ITERATION)
            {
                fI  real_part      = xI*xI-yI*yI+x0I;
                fI imaginary_part  = aI*xI*yI   +y0I;
                fI z_abs_square = real_part*real_part + imaginary_part*imaginary_part;
                if(z_abs_square > threshold)
                {
                    break;
                }
                else
                {
                    xI = real_part;
                    yI = imaginary_part;
                }
                k++;
            }

            if(k < MAX_ITERATION)
            {
                SetPixel(hdc, i, j , colors[k%50]);
            }
            else
            {
                SetPixel(hdc, i, j , RGB(0, 0, 0));
            }

            y0I = y0I - deltaI;
        }
        x0I = x0I + deltaI;
    }
#endif
```

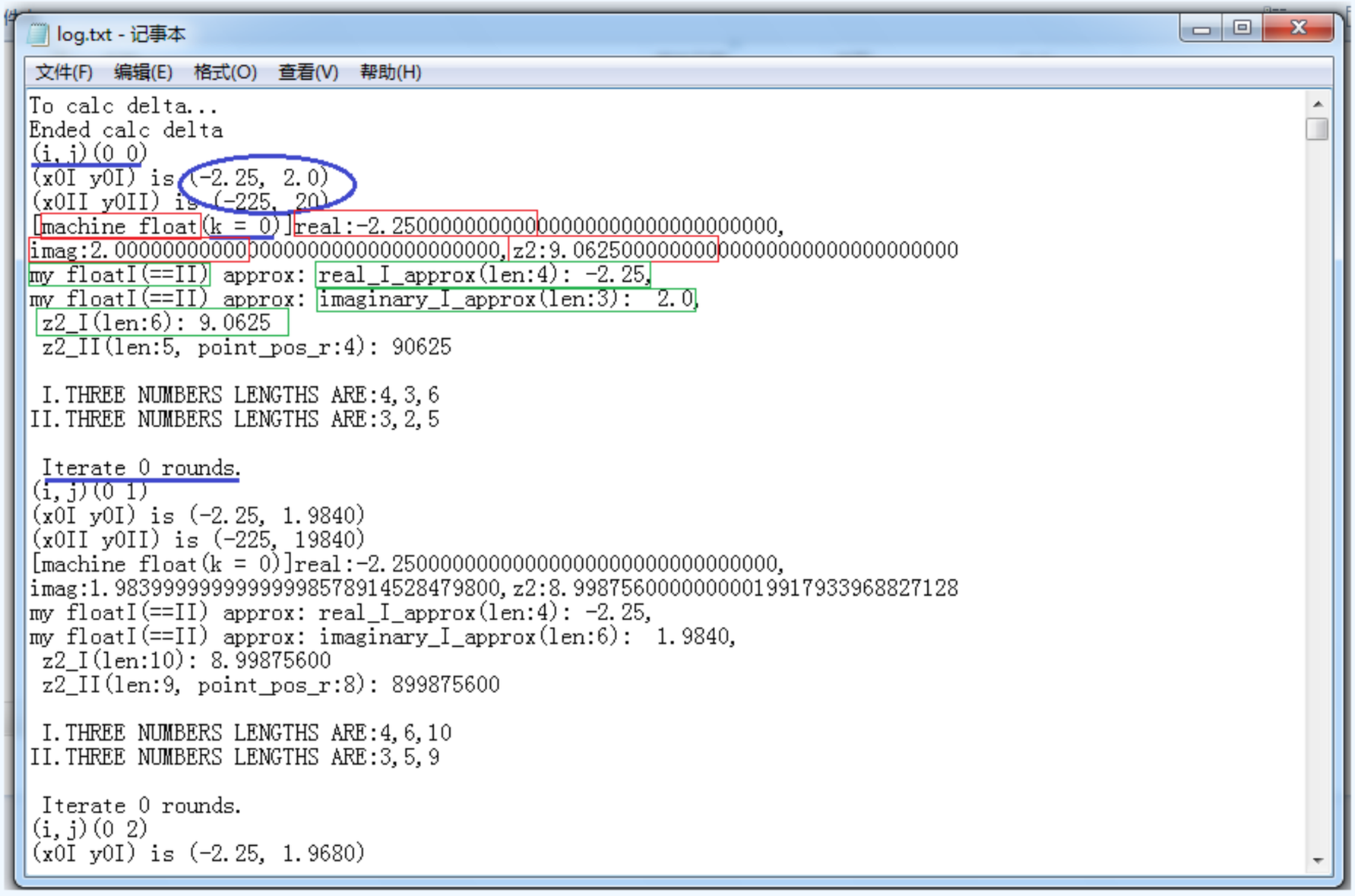
fII代码与此类似，基本上只是把I换成II或者加个II后缀罢了。

运行效果图：（现在是可以看到程序在一个一个像素写屏。下面是前后两幅图象。）





下面对log文件内容图示说明：
（蓝色线框依次标记出窗口坐标，复平面上坐标（字串有fI和fII两种形式），迭代序数，退出计算循环时总迭代次数）
（红色线框依次标记出机器浮点算出的实部、虚部、z的模方）
（绿色线框依次标记出我实现的浮点类（fI和fII，结果相等）作高精度近似计算算出的实部、虚部、z的模方的（高精度近似）值）



可见位于(0 0)这个点第1次迭代即退出了循环，在M集的外边。然后计算下一个点(0 1)。
下面再举位于(16 125)这个点为例：

```
(i,j)(16 125)
(x0I y0I) is (-1.9940, 0)
(x0II y0II) is (-19940, 0)
[machine float(k = 0)]real:-1.9939999999999999467092948179925,
imag:0.000000000000000000000000000000,z2:3.97603600000000125709220810676 92
my floatI(==II) approx: real_I_approx(len:6): -1.9940,
my floatI(==II) approx: imaginary_I_approx(len:1):  0,
 z2_I(len:10): 3.97603600
 z2_II(len:9, point_pos_r:8): 397603600

 I.THREE NUMBERS LENGTHS ARE:6,1,10
II.THREE NUMBERS LENGTHS ARE:5,1,9

[machine float(k = 1)]real:1.98203600000000013103829132887768,
```

（中间……略去）

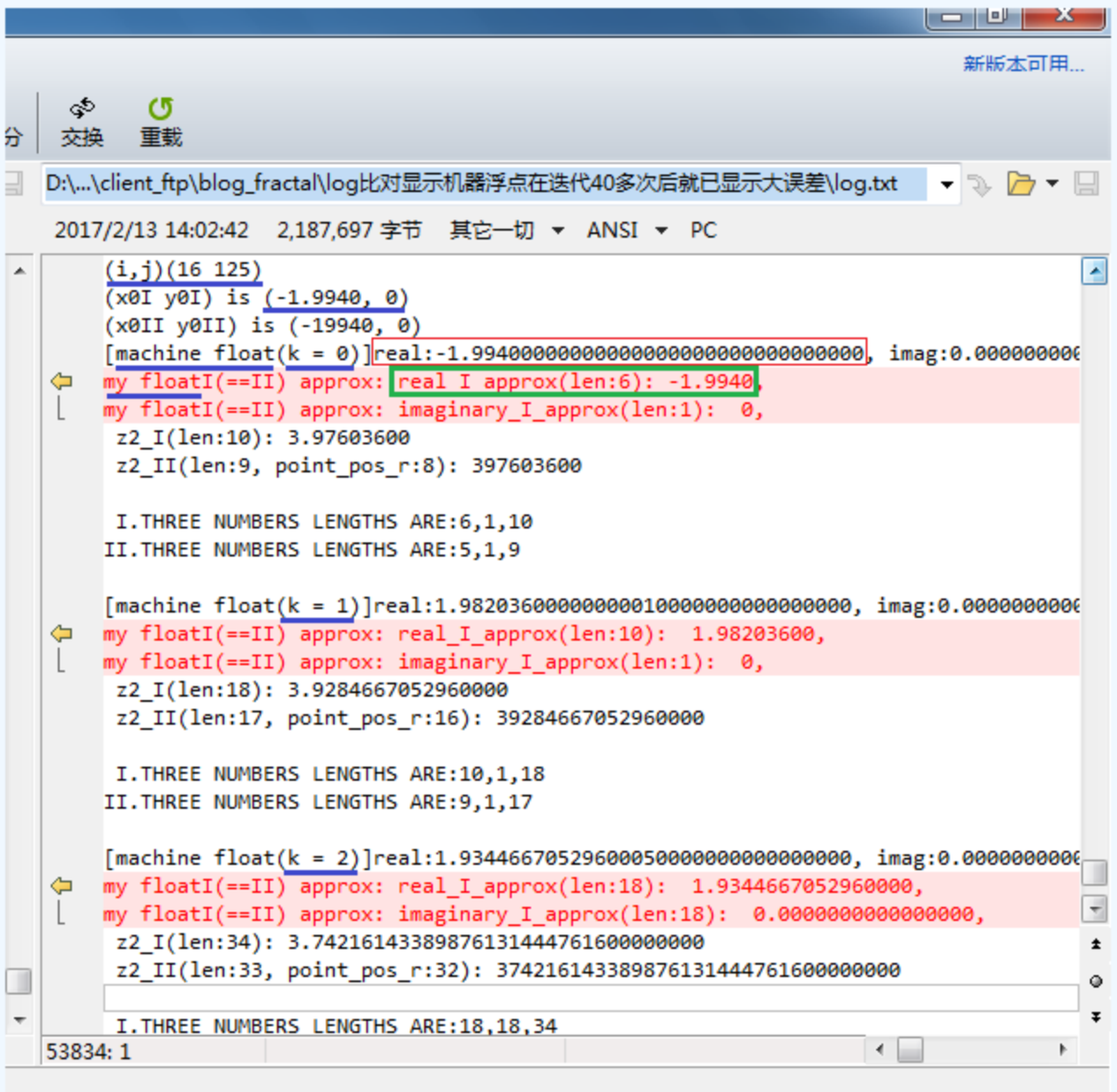
```
64265417938626846943561023208168645963561781975763473551420964533858655212366333786631034445367

 I.THREE NUMBERS LENGTHS ARE:114,1,226
II.THREE NUMBERS LENGTHS ARE:113,1,225

[machine float(k = 9)]real:1.22704288946666273396601809508866,
imag:0.000000000000000000000000000000000,z2:1.50563425259069672001999151689233
my floatI(==II) approx: real_I_approx(len:130):
1.22704288946644925393417810571716975382169436009611712740789499704801247426338853894485642568536267246802642654179386268469435610,
my floatI(==II) approx: imaginary_I_approx(len:1):  0,
 z2_I(len:258):
1.50563425259017280145615194385523815229972773206465780300748914793694261570567228224318224700890261545374897589982345184662611855311406846218691489648555500118945981772888378415099655297748730830897 8
 z2_II(len:257, point_pos_r:256):
1505634252590172801456151943855238152299727732064657803007489147936942615705672282243182247008902615453748975899823451846626118553114068462186914896485555001189459817728883784150996552977487308308978 7

 I.THREE NUMBERS LENGTHS ARE:130,1,258
II.THREE NUMBERS LENGTHS ARE:129,1,257

 Iterate 10 rounds.
(i,j)(16 126)
```

（数字末尾紫色线框标记出的内容不一样，不是计算结果不等，是结果字串长200多位，我这里最大只打印到200位。fI表示比fII表示多了一个 小数点'.'字符，所以少打印一位。）
可见位于(16 125)这个点在实轴上，属于M集，所以一直迭代到最大次数（这里是10次）还未超过阈值。不再算了，然后计算下一个点(16 126)。

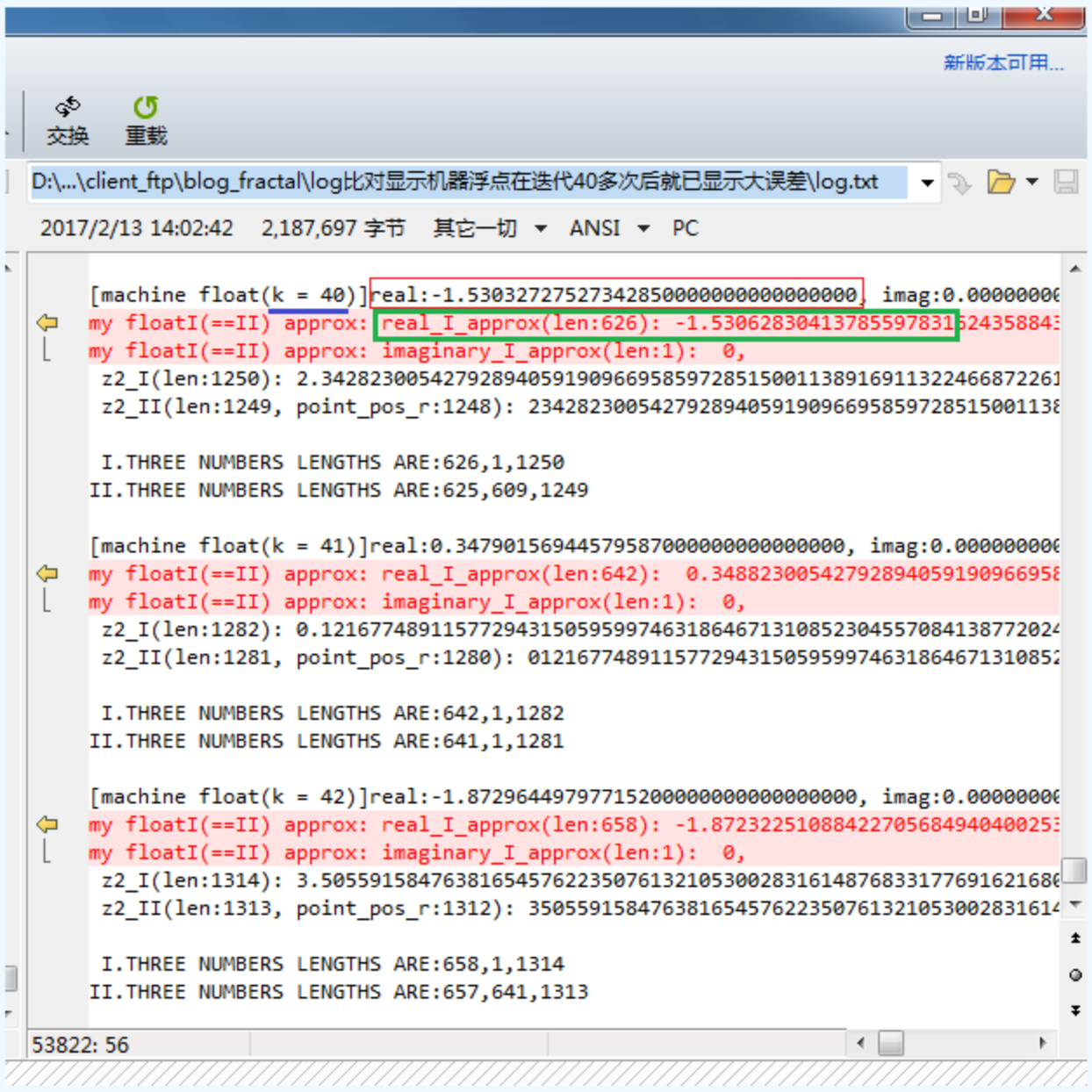
使用我自己的float类进行精确计算，带来了密集计算。我的代码中运算是直接在OnDraw函数中进行的，这导致程序不响应外部消息。 在Win XP中不响应外部消息也罢，还能看到程序还在一个像素一个像素地写屏；在Win 7中看到程序画了少量像素后就不写屏了，只显示“程序不响应”。
为了不让密集计算阻塞消息循环（阻塞消息循环，不是阻塞进程；OnDraw函数在主线程中，在其中密集计算会使主线程长久在这个函数中运行， 拖住了（MFC自身实现的）消息循环的进行。），要么另开一个工作线程来进行计算，要么在密集计算中另插入自己的（非阻塞的）消息处理循环。 这里采用了后一种方法。但在关闭窗口时有点问题，进程没有退出，OnDraw还在运行，只好在View中加了OnDestroy函数处理了一下。
有了自己的float类的精确计算，可以发现机器浮点double类型近似计算的误差累积。下面是log例子。（log文件下载（下面节选部分在log文件最后处））
（由于迭代次数较高，这里my floats用了一定精度的近似值来与机器浮点double的结果作比较，当然，这个精度远远高过double精度。）
这里观察的是坐标(i,j)为(16,125)的点的迭代计算：

（红方框内为机器浮点计算结果，绿方框内为自己实现的计算结果）

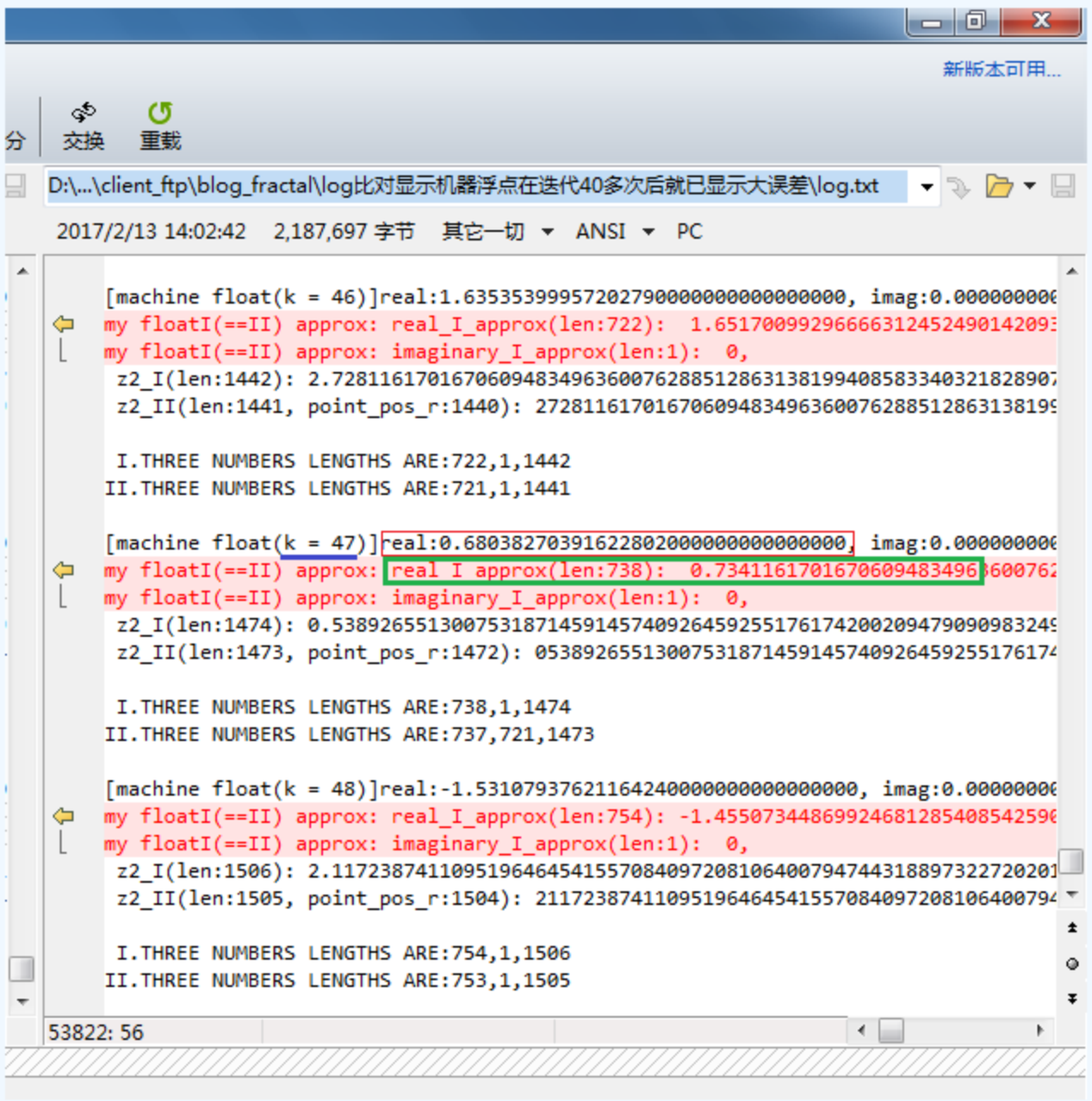
k= 0时，结果是一样的；



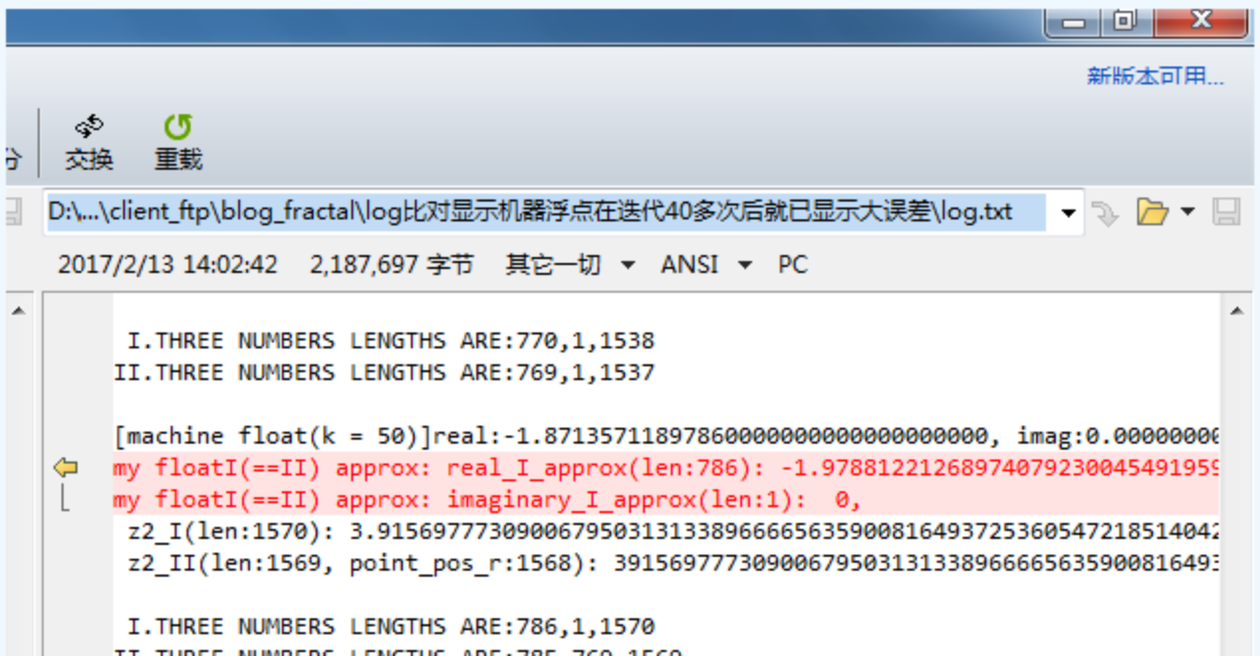
k=40时，差别还不大；



k=47时，小数点后第1位已经有差别了；



k=52时，已经不能认为两者值接近了；



```
II.THREE NUMBERS LENGTHS ARE:785,769,1569

[machine float(k = 51)]real:1.507977466751886200000000000000000, imag:0.000000000
my floatI(==II) approx: real_I_approx(len:802):  1.92169777309006795031313389666
my floatI(==II) approx: imaginary_I_approx(len:1):  0,
 z2_I(len:1602): 3.69292233109932628807896035942350390564017224418694254981450820
 z2_II(len:1601, point_pos_r:1600): 369292233109932628807896035942350390564017220

 I.THREE NUMBERS LENGTHS ARE:802,1,1602
II.THREE NUMBERS LENGTHS ARE:801,1,1601

[machine float(k = 52)]real:0.279996040231435870000000000000000, imag:0.000000000
my floatI(==II) approx: real_I_approx(len:818):  1.69892233109932628807896035942
my floatI(==II) approx: imaginary_I_approx(len:1):  0,
 z2_I(len:1634): 2.88633708710796885875523540328029876592321061683293334041318960
 z2_II(len:1633, point_pos_r:1632): 2886337087107968858755235403280298765923210600
```

53822: 56

k=53开始，结果正负都不一样了。

新版本可用...

交换　重载

D:\...\client_ftp\blog_fractal\log比对显示机器浮点在迭代40多次后就已显示大误差\log.txt

2017/2/13 14:02:42　2,187,697 字节　其它一切　ANSI　PC

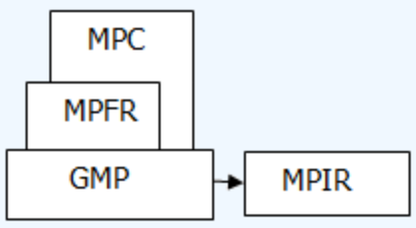
```
[machine float(k = 53)]real:-1.915602217454716000000000000000000, imag:0.000000000
my floatI(==II) approx: real_I_approx(len:834):  0.89233708710796885875523540328
my floatI(==II) approx: imaginary_I_approx(len:1):  0,
 z2_I(len:1666): 0.79626547702833480282837968598573206314429239270337804924822844
 z2_II(len:1665, point_pos_r:1664): 0796265477028334802828379685985732063144292300

 I.THREE NUMBERS LENGTHS ARE:834,1,1666
II.THREE NUMBERS LENGTHS ARE:833,1,1665

[machine float(k = 54)]real:1.675531855517425000000000000000000, imag:0.000000000
my floatI(==II) approx: real_I_approx(len:850): -1.19773452297166519717162031401
my floatI(==II) approx: imaginary_I_approx(len:1):  0,
 z2_I(len:1698): 1.43456798751816238590090607293730199854079883152809172604012380
 z2_II(len:1697, point_pos_r:1696): 1434567987518162385900906072937301998540798800

 I.THREE NUMBERS LENGTHS ARE:850,1,1698
II.THREE NUMBERS LENGTHS ARE:849,833,1697

[machine float(k = 55)]real:0.813406998853665410000000000000000, imag:0.000000000
my floatI(==II) approx: real_I_approx(len:866): -0.55943201248183761409909392706
my floatI(==II) approx: imaginary_I_approx(len:1):  0,
 z2_I(len:1730): 0.31296417658947891605763885234804014497478016441402855244989360
 z2_II(len:1729, point_pos_r:1728): 031296417658947891605763885234804014497478010

 I.THREE NUMBERS LENGTHS ARE:866,1,1730
II.THREE NUMBERS LENGTHS ARE:865,1,1729
```

54280: 46　默认文本

（backfract好象是用long double类型来实现的，但这仍然是太少了。）
区域放大功能这一版本中尚未实现。此外，M集的放大是无穷无尽的，在计算结果得到一定保证之后，我们要考虑究竟怎样放大：手动选取？自动选取？ 要怎样呈现M集的图案？

第3个程序

(3) GMP实现
GMP是GNU的大数库。我用的GMP库是在虚拟机WinXP上用MinGW编译出来的，然后可以给VC++6下应用程序直接链接使用，再需加一些MinGW中的库 和Windows的库。我在升级/更新程序到虚拟机Win 7+vs2015环境时，这个库仍然可用，仅仅MinGW中的libmsvcrt.a会影响到fprintf函数不能使用， 所以我将vs2015下的代码中的fprintf都改成了fwrite。运行时另外再加上了一些提示需要的VS中VC的库和MS的SDK的库。
GNU的大数库包括GMP、MPFR、MPC库。GMP是大数整数分数库，本来也包含的浮点库功能部分现已可被MPFR代替（GMP手册语）；MPFR是大数任意精度 浮点库，基于大数整数库GMP；MPC是大数复数库，基于前两者。（有意思的是构建GCC的话要依赖这些库。）此外，还有一个分支 MPIR从GMP分出来，据说其 着眼于让该大整数库可在Windows下用VS编译，因GMP不行，我这里未用该库。本来我以为要用MPFR库来实现所需功能，所以文件名用了mpfr（mandel_with_mpfr_test）， 后来发现只需用GMP库分数部分即可，而且后者以绝对精度进行计算，而不是止于前者的“任意精度”。但文件名没改掉，代码只用了MPFR作了 一处打印日志的功能，其他与MPFR均无关系。

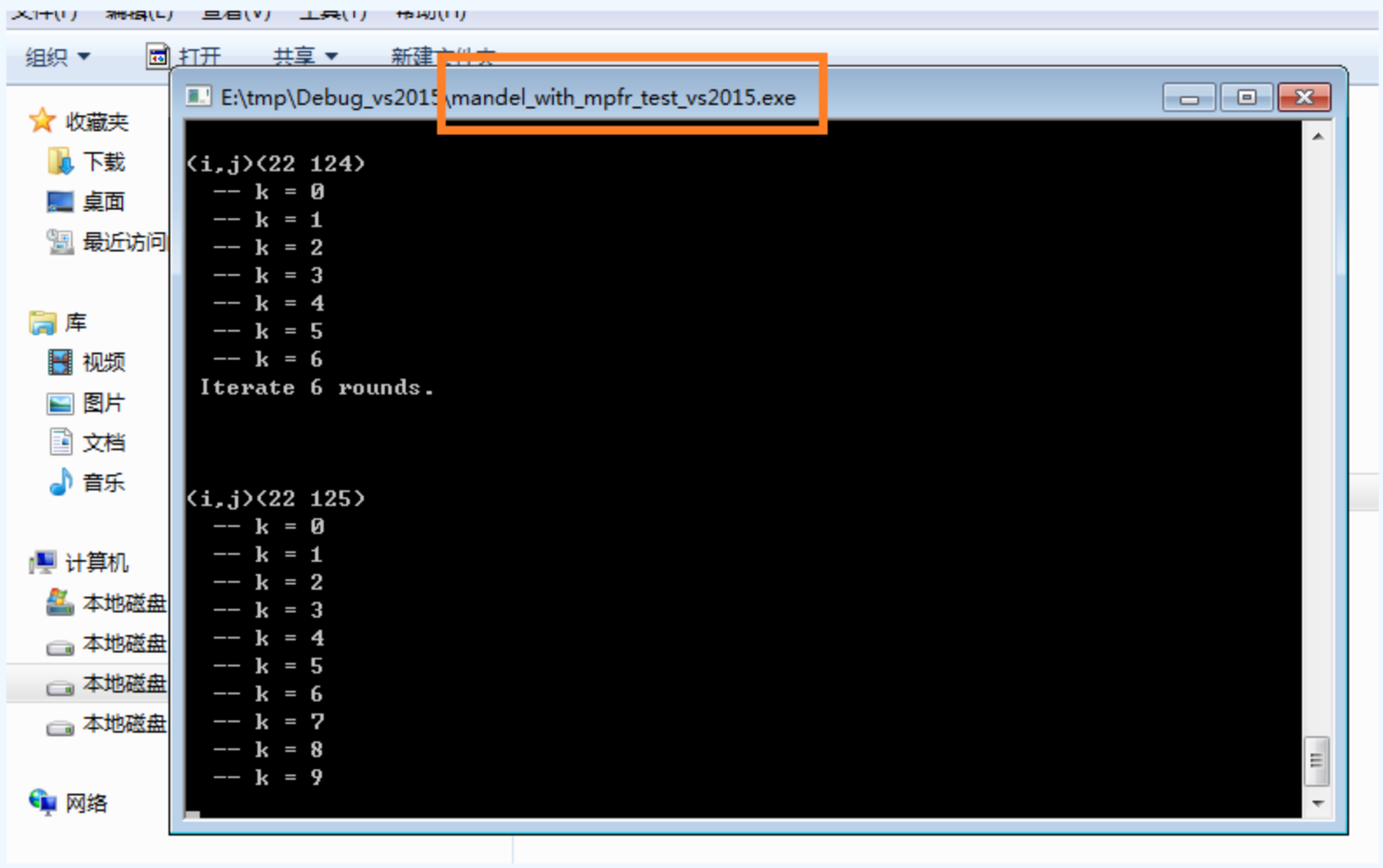


我在WinXP虚拟机上安装了网上下载的MinGW+MSYS离线安装包，按照手册和configure帮助配置、编译了GMP、MPFR（MPFR源码包中有个INSTALL文件讲了 其Windows下三种方式编译:MinGW、Cygwin、vs2015），没有什么太特别的，不过一次只能指定编一个要么静态库要么动态库，我只编译了静态库。 生成的静态库libgmp.a、libmpfr.a可直接给VC++6（及vs2015）使用：

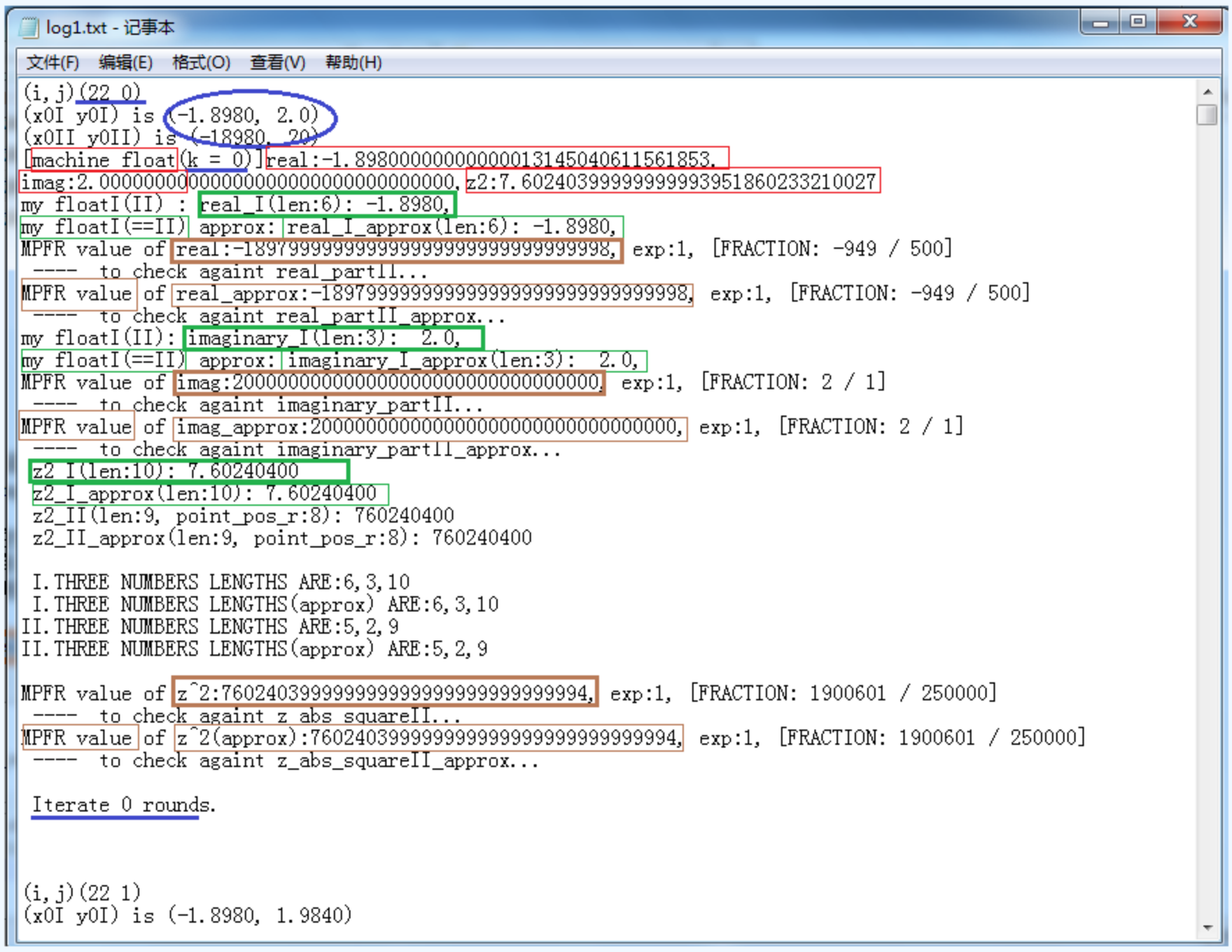
mandel_with_mpfr_test_vs2015\mpfr_inc.h:

```
#pragma comment(lib, "libmpfr.a")
#pragma comment(lib, "libgmp.a")
#pragma comment(lib, "libgcc.a")
#pragma comment(lib, "libgcc_s.a")
#pragma comment(lib, "libmingwex.a")
#pragma comment(lib, "libmsvcrt.a")
```

其他lib*.a均为编译程序时所需的MinGW中的库。此外运行还需MinGW下的libgcc_s_dw2-1.dll和一些Windows上的dll。
GMP是c实现的，有一个C++的包装库可以配置编译，但手册上说了，该c++库一般只能给同一个（c++）编译器的应用程序使用。开发中我发现， 必须用c编译器而非c++编译器处理包含gmp.h的文件，因此mpfr_lib.c必须为.c文件而非.cpp文件。
链接MPFR库有顺序要求，要先libmpfr.a，然后libgmp.a。此外手册上提到VC++使用GMP库在一定情况下必须指示Windows的cl编译器使用/MD选项编译。
（有一个分形的开源项目FractalNow从版本8.0开始加入了使用MPFR计算，该项目基于Qt，我在Ubuntu和WinXp MinGW下编译了该项目。Ubuntu上有这个项目的包，构建起来相对容易；Windows上其使用的Qt4.8要求MinGW的GCC必须为4.4的，我只好又从网上搜了个GCC4.4的MinGW下载，然后拷贝以前的MSYS目录使用，此外还下载了一个pthreads-w32的包才完成编译。）
运行图：



log文件中主要是多了些GMP计算结果和用MPFR打印的内容：
下面这第一张图是坐标(22 0)的点。（如果你不改下载的程序源码，很可能看到的log开头就是这儿，因我调试时是跳过了前面的坐标点，从列22开始的， 代码没整理，没去掉这个。）
蓝、绿、红的线框标识的含义仍同前所述。赭色的是GMP的计算结果用MPFR打印出的小数。多了相应颜色的加粗线框是新增的，打印的是绝对精确值而非高精度近似值。先后就实部精确值、实部近似值、虚部精确值、虚部近似值、z的模方精确值、z的模方近似值使用GMP对我自己的float实现进行了验证。



上图循环1次即结束了，log较短。再以坐标(22 125)的点的第k=9次迭代进一步看看，这下log长了，一张图显示不下，而且我这里只好把其中冗长的多行数字 用*行代替。下面第1张完成了实部精确值、近似值的比较：

```
907897385503481662438907861960533088640116084240935508693925840849577072991466390453794326590052 2,
MPFR value of
real:1423998863627063450261169924036846726308627126575651248312031495170459633496623396899910166887147652
**********
4916443930085161598121512196746515175205301221985176718570160909147176959999999999999999999999999999999999
**********
997, exp:1, [FRACTION:
1062066872577253589994108605076142903118145686664182024851191572119437825466818219657680474154188314134 09
**********
158346883123481601 /
7458340731200206743290965315462933837376471534600406894271518333206278385070118304936174890400427803361 51
**********
0000000000000000]
 ----  to check againt real_partII...
MPFR value of
real_approx:142399886362706345026116992403684672630862712657565124831203149517045963349662339689991016688
**********
52199999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999996, exp:1,
[FRACTION:
7119994318135317251305849620184233631543135632878256241560157475852298167483116984499550834435738261184 17
**********
39486927517408312194539309802665443200580421204677543469629204247885364957331952268971632950261 /
5000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
**********
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000]
 ----  to check againt real_partII_approx...
```

第2张完成了虚部精确值、近似值的比较。因该点在实轴上，虚部为0，所以log很短。

```
log1.txt - 记事本
文件(F)  编辑(E)  格式(O)  查看(V)  帮助(H)
 ----  to check againt real_partII_approx...


(续上)

my floatI(II): imaginary_I(len:1):  0,
my floatI(==II) approx: imaginary_I_approx(len:1):  0,
MPFR value of imag:0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000, exp:0, [FRACTION: 0 / 1]
 ----  to check againt imaginary_partII...
MPFR value of imag_approx:0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000, exp:0, [FRACTION: 0 / 1]
 ----  to check againt imaginary_partII_approx...



 z2_I(len:4098):
2.027772763611168049794734620409974944011290230531368193090659727836412618291438545434712516204109055377 4
```

最后第3张中完成了z的模方的精确值、近似值的比较。

```
log1.txt - 记事本
文件(F)  编辑(E)  格式(O)  查看(V)  帮助(H)
 z2_I(len:4098):
2.027772763611168049794734620409974944011290230531368193090659727836412618291438545434712516204109055377 4**********
 z2_I_approx(len:2082):
2.027772763611168049794734620409974944011290230531368193090659727836412618291438545434712516204109055377 4**********
z2_II(len:4097, point pos r:4096):
202777276361116804979473462040997494401129023053136819309065972783641261829143854543471251620**********
z2_II_approx(len:2081, point pos r:2080):
202777276361116804979473462040997494401129023053136819309065972783641261829143854543471251620**********
        I.THREE NUMBERS LENGTHS ARE:2050,1,4098
        I.THREE NUMBERS LENGTHS(approx) ARE:1042,1,2082
        II.THREE NUMBERS LENGTHS ARE:2049,1,4097
        II.THREE NUMBERS LENGTHS(approx) ARE:1041,1,2081
MPFR value of
z^2:202777276361116804979473462040997494401129023053136819309065972783641261829143854543471251620410905537
**********
99999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999988, exp:1,
[FRACTION:
1127986041826028213684848556404091272139602208641532267852857279344836047763870362472385336426487967553 57
**********
45387047403417244267647071785523201 /
5562684646268003457725581793331010160548039951155829576383318542218011087034795489635707897531277551410 16
**********
0000000000000000000000000000000000]
 ----  to check againt z_abs_squareII...
MPFR value of z^2
(approx):202777276361116804979473462040997494401129023053136819309065972783641261829143854543471251620410
**********
99999999999999999999999999999999999995, exp:1, [FRACTION:
5069431909027920124486836551024937360028225576328420482726649319591031545728596363586781290510272638443 63
**********
2539729602870683792779070176393392464970002275158708264642155503410873928894899968121 /
2500000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
**********
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000]
 ----  to check againt z_abs_squareII_approx...

 Iterate 10 rounds.
(i,j)(22 126)
```

这些图中没标记的“[FRACTION ... / ...]”字样的部分是GMP采用的分数形式表示，即 分子 / 分母，且是不可约的。

这第3个程序没有了图形界面功能，只剩纯粹的计算。代码从View.cpp换到了main.cpp，新增GMP实现的函数均以“GMP_”开头，在mpfr_inc.h和mpfr_lib.c两个文件中（如上所述，用的mpfr的文件名）。把前面的伪码变成用GMP的代码示意：

（伪码）：	（对应GMP实现）：

x0(left);
y0(above);
a("2");
threshold("4.0");
for(i = 0; i < w; i++)
{
	GMP_init_calc()

```
y0 = above;                                  GMP_reset_y0()
for(j = 0; j < h; j++)
{
   x("0");                                   GMP_reset_x()
   y("0");                                   GMP_reset_y()
   k = 0;
   while(k++ < MAX_ITER)
   {
      real = x*x-y*y +x0;                    GMP_calc_real()
      imag = a*x*y +y0;                      GMP_calc_imag()
      z_square = real*real + imag*imag;      GMP_calc_z_square()
      if(z_square > threshold)               if(GMP_cmp_threshold() > 0)
         break;
      else{
         x = real;                              GMP_set_x_as_real()
         y = imag;                              GMP_set_y_as_imag()
      }
   }
   y0 = y0 - delta;                          GMP_update_y0()
}
x0 = x0 + delta;                           GMP_update_x0()
                                          GMP_clear()
```

这第3个程序对my floats类代码的唯一修改在于：在作近似计算时，要继续比较两种实现结果的一致性，需要对GMP的计算结果也作相应近似，那么必须在 我自己的float类作近似时有一个输出，告知GMP实现怎样作相应近似。这就是在truncate_floatII函数加了一个参数p_pos告诉GMP实现方面：我是在第几位 截断的，那么你也要在那一位作相应截断。
改变前后：

my_mandel_test_my_floats_vs2015\my_floats.h　　4,210 字节　C,C++,C#,ObjC 源代码　ANSI　PC

```
extern bool are_floatI_versus_floatII_equal( float_number& fI,

extern int  chtoi(char ch);
extern char itoch(int  i );

#if 1
//extern floatII&
extern floatII  truncate_floatII(int x_precision, int y_precisio
                                 int min_precision_to_truncate,
                                 floatII&  f,
                                 int add_to_tail_precision);
extern float_number   truncate_floatI (float_number&  x, float_n
                                 int min_precision_to_truncate,
                                 float_number&  f,
                                 int add_to_tail_precision);
#endif

#endif//_MY_FLOATS_H
```

D:\...\mandel_with_mpfr_test_vs2015\my_floats.h　　4,303 字节　C,C++,C#,ObjC 源代码　ANSI　PC

```
extern bool are_floatI_versus_floatII_equal( float_number& fI,

//extern "C" {
extern int  chtoi(char ch);
extern char itoch(int  i );
//}

#if 1
//extern floatII&
extern floatII  truncate_floatII(int x_precision, int y_precisic
                                 int min_precision_to_truncate,
                                 floatII&  f,
                                 int add_to_tail_precision,
                                 int* p_pos);
extern float_number   truncate_floatI (float_number&  x, float_r
                                 int min_precision_to_truncate,
                                 float_number&  f,
                                 int add_to_tail_precision);
#endif

#endif//_MY_FLOATS_H
```

右边完整代码：

mandel_with_mpfr_test_vs2015\my_floats.h:

```
1  extern floatII  truncate_floatII(int x_precision, int y_precision, int delta_precision,
2                                   int min_precision_to_truncate,
3                                   floatII&  f,
4                                   int add_to_tail_precision,
5                                   int* p_pos);
```

my_floats.cpp中作的相应改动下面即将看到。
truncate_floatI目前未作改动，因为floatI和floatII的结果一致，我目前使用其中的一种就可以了，目前使用的是floatII。
加了GMP实现后，发现修正了my_floatI.cpp（my_floatII.cpp中同样）的一处（初级，:-)）bug：

D:\...\blog_fractal\my_floatIandII\my_floatI.cpp　　2016/5/27 15:29:08　26,980 字节　C,C++,C#,ObjC 源代码　A

```
bool is_floatI_zero(const float_number& f)
{
    char* p = f.number;

    while(*p++ != '\0')
    {
        if( !(*p == '0' || *p == '.') )
            break;

    }
    if(*p == '\0')
        return true;
    else
        return false;
}
```

D:\...\blog_fractal\mandel_with_mpfr_test\my_floatI.cpp　　2017/2/28 13:57:24　31,782 字节　C,C++,C#,ObjC 源代码　ANSI

```
bool is_floatI_zero(const float_number& f)
{
    char* p = f.number;

    while(*p != '\0')//bug code: while(*p++ != '\0')
    {
        if( !(*p == '0' || *p == '.') )
            break;
        else
            p++;
    }
    if(*p == '\0')
        return true;
    else
        return false;
}
```

怎么又要作近似计算了呢？由于绝对精确的计算（不作任何近似）对存储小数的位数需求是随迭代次数幂指数式增长的，10次迭代以K计，20次迭代以M计， 30次迭代就以G计了。 此外这样计算在PC上迭代到第10次左右差不多千位乘千位数量级时算一个点已经感觉有点慢了。所以实际计算必须作一定的近似，比如让存储所需位数 随迭代线性增长。并考虑估量取得结果的速度。
目前我考虑的近似算法大致是这样的：
第(0)步：定一个精度提高位数要求，比如在原有精度上加16位；
第(1)步：定一个精度达到位数，需考虑(A)起始坐标精度；(B)坐标步进值精度；再加上第(0)步期望；(C)随迭代次数增加（？）
第(2)步：计算结果是否超出精度需求？若否，则不改变值；
第(3)步：若(2)是，计至小数点后精度位，然后：
　(A)若前面已有有效数字，则向后加计最多如16位；
　(B)若前面尚未有有效数字（全'0'），除非0值，向后找到第1位有效数字(非'0'值)，然后向后加计最多如16位；
实现:(以floatII为例)（（高亮行即上面所说该函数的改动添加））

mandel_with_mpfr_test_vs2015\my_floatII.cpp:

```
floatII truncate_floatII(int x_precision, int y_precision, int delta_precision,
                                    int min_precision_to_truncate,
                                    floatII&  f,
                                    int add_to_tail_precision,
                                    int* p_pos)
{
    *p_pos = 0;

    int truncate_part_len = 0;
    int i;
    //if(f.point_pos_r < min_precision_to_truncate)
    //  return f;

    floatII approximation = f;

    int max = x_precision ;
    max = y_precision > max ? y_precision : max ;
    max = delta_precision > max ? delta_precision : max ;

    if(f.point_pos_r <= max)
        return approximation;

    max += add_to_tail_precision;
    if(f.point_pos_r <= max)
        return approximation;
    else
        truncate_part_len = f.point_pos_r - max;

    max -= add_to_tail_precision;
    //go to NO.`max' after '.' of f
    /*
       result (= x * y)  ((precison of a by b )) :
       (a) common case: (some non-'0' ahead)
            0.020030040805097600000000001300xxxxxxxxxxxxxxxx
       (b)   rare case: (all '0's ahead)
            0.00000000000000000000000013000000050000xxxxxxxx
         or 0.0000000000000000000000000130    (shorter vs. above)
    */
    int len = strlen(f.digits);
    int int_len = len - f.point_pos_r;
    char* p = approximation.digits;
    bool is_there_nonzero = false;
    for(i = 0; i < (int_len + max); i++)
    {
        if(p[i] != '0')
        {
            is_there_nonzero = true;
            break;
        }
    }

    if(is_there_nonzero)
    {
         approximation.point_pos_r -= truncate_part_len;
         int len2 = len - truncate_part_len;
         memset(&p[len2], 0, truncate_part_len);
         p[len2]  = '\0'; //clear again ( redundant though)

         *p_pos = len2 - int_len + 1;//*p_pos = &p[len2] - &p[int_len] + 1;
         return approximation;// (.)
                              //531415
                              //0123456
                              //     ^
    }
    else //TODO: to log and check this rare/corner case.
    {

        for(i = (int_len + max); i < len; i++)
        {
            if(p[i] != '0')
                break;
        }
        if(i == len)
        {
            floatII   result("0");

            return  result;
        }
        else
        {
            if( (len - i -1) <= add_to_tail_precision  )
                return approximation;
            else
            {
                truncate_part_len = len - (i + 1 + add_to_tail_precision);
                approximation.point_pos_r -= truncate_part_len;
                memset(&p[i+1+add_to_tail_precision], 0, truncate_part_len);

                *p_pos = i+1+add_to_tail_precision - int_len + 1;

                return approximation;
            }
        }

    }
}
```

使用近似计算的代码所需改动：

```
for(i = 0; i < w; i++)
{
        y0 = above;
        for(j = 0; j < h; j++)
        {
                x=0;
                y=0;
                k = 0;
                while(k++ < MAX_ITERATION)
                {                                                fI/fII 实现          GMP 实现
                        real  = x*x - y*y + x0;
                                                  近似： real(approx)    truncate_floatI/ II    GMP_truncate_real( )
```

```
                imag  = 2*x*y   + y0;
                                        近似： imag(approx)        truncate_floatI/ II       GMP_truncate_imag( )
                z_square = real*real + imag*imag;
                if(z_square > threshold)
                        break;
                else{
                        x = real;               ~~x = real;~~  x = real(approx);
                        y = imag;               ~~y = imag;~~ y = imag(approx);
                }
            }
            y0 = y0 - delta;
        }
        x0 = x0 + delta;
}
```

其中GMP截断近似的实现：（以GMP_truncate_real()为例。GMP_truncate_imag()代码只是把"real"换成"imag"而已。）

mandel_with_mpfr_test_vs2015\mpfr_lib.c:

```
void GMP_truncate_real(char* str_numerator, char* str_denominator,
                       char* str_gmp_mpfr, int* p_exp, int mpfr_precision,
                       int len, int trunc_pos)
{
    mpz_t   numerator;
    mpz_t   denominator;

    mpq_t   a;

    mpfr_t   f1, f2;
    mpfr_exp_t  exp;

    mpz_init(numerator);
    mpz_init(denominator);

    mpq_init(a);


    mpq_set(gmp_real_approx, gmp_real);

    if(trunc_pos == 0)
    {
        //return;
    }
    else
    {
       int n;
       char* str;
       char* p;
       mpz_set(denominator, mpq_denref(gmp_real_approx));
       //gmp_printf("denominator is %Zd\n", denominator);
       mpq_set_si(a, 10,  1);
       n = 0;
       while( mpz_cmp_si(denominator, 1) != 0)
       {
           mpq_mul(gmp_real_approx, gmp_real_approx, a);
           //gmp_printf("%#040Qd\n", gmp_real_approx);

           mpz_set(denominator, mpq_denref(gmp_real_approx));
           n++;
       }
       //printf("\n multiplied by 10^ %d\n" , n);
       mpz_set(numerator, mpq_numref(gmp_real_approx));
       //gmp_printf("numerator is %Zd\n", numerator);

       str = (char*)malloc(len+16); //some more space
       memset(str, 0, len+16);//buggy: memset(str, 0, sizeof(str));
       mpz_get_str(str, 10, numerator);
       //printf("str got:%s\n", str);
       p = str + strlen(str);
       p -= (n-trunc_pos)+1;              //53.1415926
       while( *p != '\0')
           *p++ = '0';

       mpq_set_str(gmp_real_approx, str, 10);
       mpq_canonicalize(gmp_real_approx);
       while(n > 0)
       {
           mpq_div(gmp_real_approx, gmp_real_approx, a);
           //gmp_printf("%#040Qd\n", approx);
           n--;
       }

       free(str);
    }

    mpz_set(numerator, mpq_numref(gmp_real_approx));
    mpz_get_str(str_numerator, 10, numerator);

    mpz_set(denominator, mpq_denref(gmp_real_approx));
    mpz_get_str(str_denominator, 10, denominator);

      //for visualizing the string
      mpfr_init2(f1, (mpfr_prec_t)mpfr_precision);
      mpfr_init2(f2, (mpfr_prec_t)mpfr_precision);

      mpfr_set_z(f1, numerator  , MPFR_RNDZ);
      mpfr_set_z(f2, denominator, MPFR_RNDZ);
      mpfr_div(f1, f1, f2, MPFR_RNDZ);
      mpfr_get_str(str_gmp_mpfr, &exp, 10, 0, f1, MPFR_RNDZ);
      *p_exp =(int)exp;

      mpfr_clear(f1);
      mpfr_clear(f2);
    mpz_clear(numerator);
    mpz_clear(denominator);

   mpq_clear(a);


}
```

这个截断实现的原理是这样的：由于程序中的分数都被设计为有限小数，不是无限小数，（更非无理数），对一等于形如小数53.1415926等等的 计算结果，让其乘以10的若干（将会是小数位数）次方直至得到整数（判断方法是分母为1），然后按照指定的截断位置，将整数字串该位置 及以后置为字符“0”，用此字串构造mpq_t，再除以10的相应次方。即完成了计算结果的截断。函数代码高亮第30行取得分母，第32行为待用乘数10， 34、36行可看到循环乘10并判断分母是否成了1。43行取得此时的分子，高亮第48行取得此时分子的字串。50-53行将此字串在截断位置后部置“0”。 55行构造新的GMP分数后，高亮第57、59行可见循环除以10的n次方。

讲了这么多，还没看到加法和乘法的代码。虽然这只是小学数学运算，这里还是大致看一下。虽然上面GMP显示了很强的功能，或许以后 更多计算用GMP（及MPFR）编程是更好的替代（因其可用分数，即无限循环小数，等等其他自己不具备的功能），在可用的地方多一种实现 并行可能更好。在不可用的地方只好用GMP了。

以floatII类的实现为例，floatI类的实现冗长一些，floatII类的简洁一点，算法是一样的。加法没太多好说的：

mandel_with_mpfr_test_vs2015\my_floatII.cpp:

```
1   floatII  floatII::operator+ (      floatII& f2)
2   {
3       //TODO: 0?
4
5       int sign, pos;
6
7       //align point
8       floatII f1 = *this;
9       int int_len1  = strlen(f1.digits) - f1.point_pos_r;
10      int int_len2  = strlen(f2.digits) - f2.point_pos_r;
11      int frac_len1 = f1.point_pos_r;
12      int frac_len2 = f2.point_pos_r;
13      int max_int_len  = int_len1  >= int_len2  ?  int_len1 : int_len2 ;
14      int max_frac_len = frac_len1 >= frac_len2 ? frac_len1 : frac_len2;
15
16      floatII f1_old = f1;
17      floatII f2_old = f2;
18
19      //pos
20      pos = max_frac_len;
21
22      int len =  max_int_len + max_frac_len;
23
24      char* s1 = f1.extend_zero2( max_int_len-int_len1, max_frac_len-frac_len1);
25      char* s2 = f2.extend_zero2( max_int_len-int_len2, max_frac_len-frac_len2);
26
27      if(f1.minus == f2.minus)
28      {
29            //minus assign
30            sign = f1.minus? -1 : +1;
31
32            int* carry = (int*  )malloc( (len+1)   *sizeof(int));
33            char*    r = (char* )malloc(  len );
34            memset(carry, 0, (len+1)*sizeof(int));
35            char* q = s1+len-1;
36            char* p = s2+len-1;
37            int   m;
38            int   k = 0;
39            while(q >= s1)
40            {
41                m = chtoi(*q) + chtoi(*p) + carry[k];
42                if(m >= 10)
43                {
44                   carry[k+1] += 1;
45                   r[k] = itoch(m-10);
46                }
47                else
48                {
49                   r[k] = itoch(m);
50                }
51
52                p--;
53                q--;
54                k++;
55            }
56
57            char* str = (char* )malloc(len+1+1); //doesn't care if more
58            int i = 0;
59            int j;
60            if(carry[k] > 0)
61                str[i++] = itoch(carry[k]);
62            for(j = 0; j < len; j++)
63                str[i++] = r[len-1-j];
64            str[i] = '\0';
65
66            floatII str_result(str, sign, pos);
67
68            free(str); //? do it in destructor?
69
70            free(r);
71            free(carry);
72            free(s1);
73            free(s2);
74
75            return str_result;
76      }
77      else
78      {
79            //to decide sign
80            char* p = s1;
81            char* q = s2;
82            while(*p != '\0') //  && *q != '\0'
83            {
84                if(chtoi(*p) != chtoi(*q))
85                     break;
86                p++;
87                q++;
88            }
89            if(*p == '\0')
90            {
91                free(s1);
92                free(s2);
93
94                floatII  f4("0");
95                if(MY_DEBUG) printf("they are equal,minus result is 0\n");
96                return f4;
97
98            }
99            else
100           {
101               bool t  = chtoi(*p) > chtoi(*q) ? f1.minus : f2.minus;
102               sign = t? -1 : +1;
```

```
103
104                 char* big   = (*p > *q) ? s1 : s2;
105                 char* small = (*p > *q) ? s2 : s1;
106
107                 p = big   + len-1;
108                 q = small + len-1;
109
110                 int* borrow = (int*  )malloc( (len)   *sizeof(int));
111                 int  n;
112                 char*     r = (char* )malloc( (len));
113                 memset(borrow, 0, (len)*sizeof(int));
114                 int  k = 0;
115
116                 while(p >= big)
117                 {
118                     if( (chtoi(*p) + borrow[k]) >= chtoi(*q))
119                     {
120                         n = chtoi(*p) + borrow[k] -chtoi(*q) ;
121                     }
122                     else
123                     {
124                         char* l = p-1;
125                         while( chtoi(*l) == 0 )
126                         {
127                             *l = '9';
128                             l--;
129                         }
130                         borrow[k] = 10;
131                         *l -= 1;
132                         n = chtoi(*p) + borrow[k] - chtoi(*q) ;
133                     }
134                     r[k] = itoch(n);
135
136                     p--;
137                     q--;
138                     k++;
139                 }
140                 //TODO: to remove leading 0s in integer part
141
142                 char* str = (char* )malloc(len+1);
143                 int i = 0;
144                 int j;
145                 for(j = 0; j < len; j++)
146                     str[i++] = r[len-1-j];
147                 str[i] = '\0';
148
149                 floatII    str_result2(str, sign,  pos);
150
151                 free(str);
152
153                 free(r);
154                 free(borrow);
155
156                 free(s1);
157                 free(s2);
158
159                 return str_result2;
160             }
161         }
162 }
```

高亮第7行开始，准备对齐小数点。20行得到小数点位置。24、25行把'0'字符补齐。27行同号，准备加，下面就是相加，记录进位值。 57行开始准备结果字符串，计算是从低到高即从右到左进行的，而计算结果字符串是从左到右表示。66行用字符串等构造fII类对象返回。 84行异号相减先比较绝对值大小。94行比较结果为相等，则返回0。104行准备用大的减小的。下面就是作相减、借位等。完成后 同样构造字符串后，149行构造fII类对象，完成。

乘法则用到两个重载*号的函数。两个类对象的相乘被转化成一个类对象与一个整数类型值相乘，即一个数与另一数的每一位相乘，然后把各个结果 作相应的小数点移位后相加。（比如对$f_1 * f_2$， f_2形如xyzwr.st0，结果则为

$$
\begin{aligned}
result = {} & f_1 * x * 10^{m} \quad \text{(m=max\_int\_len-1)} \\
& + f_1 * y * 10^{m-1} \\
& + f_1 * z * 10^{m-2} \\
& + \ldots \\
& + f_1 * t * 10^{-2} \\
& + f_1 * 0 * 10^{-3} \quad \text{(-3=-max\_frac\_len)}
\end{aligned}
$$

）。故用了两个重载操作符的函数。

mandel_with_mpfr_test_vs2015\my_floatII.cpp:

```
1  floatII  floatII::operator* (int   m)   // 0<=m<=9
2  {
3        //TODO: 0?
4
5        int sign, pos;
6
7        floatII& f1 = *this;
8        sign = f1.minus? -1: +1; //does not care
9
10       //pos
11       pos = f1.point_pos_r;    //doesn't change
12
13       int len = strlen(f1.digits);
14       char* s = f1.digits;
15
16           int* carry = (int*  )malloc( (len+1)   *sizeof(int));
17           char*    r = (char* )malloc( (len));
18           memset(carry, 0, (len+1)*sizeof(int));
19           char* q = s+len-1;
20           int   d;
21           int   k = 0;
22           while(q >= s)
23           {
24               d = chtoi(*q) * m + carry[k];
25               if(d >= 10)
26               {
27                  carry[k+1] += d/10;
28                  d = d % 10;
29               }
30               r[k] = itoch(d);
31
32               q--;
33               k++;
```

```
            }
            //copied from add operation code part
            char* str = (char* )malloc(len+1+1); //doesn't care if more
            int i = 0;
            int j;
            if(carry[k] > 0)
                str[i++] = itoch(carry[k]);
            for(j = 0; j < len; j++)
                str[i++] = r[len-1-j];
            str[i] = '\0';

            floatII str_result(str, sign, pos);

            free(str); //? do it in destructor?
            //copied from add operation code part -- end

            free(r);
            free(carry);

            return str_result;
}


floatII  floatII::operator* (const floatII& f2)
{
      //TODO: 0?

      int sign; // pos;

      floatII& f1 = *this;
      if(f1.minus == f2.minus)
          sign = +1;
      else
          sign = -1;

          char*p = f1.digits;
          char*q = f2.digits;   //(choose the shorter to be multiplier?)
          floatII multi("0");
          int len2 = strlen(f2.digits);
          for(int i = 0; i < len2; i++)
          {
              floatII t1 = f1 * chtoi(q[i]);

              floatII t2 = shift_floatII(t1, len2 - f2.point_pos_r - 1 - i);
              multi = multi + t2;
          }

          multi.minus = (sign==-1)? true : false;
          return multi;

}

floatII&  shift_floatII (floatII&  f, int m)
{
    if(m > 0)
    {
        if(m >= f.point_pos_r)
        {
            f.extend_zero(0, m - f.point_pos_r);
            f.point_pos_r = 0;
        }
        else
            f.point_pos_r -= m;
    }
    else if(m < 0)
    {
        int int_len = strlen(f.digits) - f.point_pos_r;
        if(-m >= int_len)
            f.extend_zero(-m-int_len+1, 0);

        f.point_pos_r += -m;
    }

    return f;
}
```

高亮行即所述实现。第一个函数则与加法有类似的进位。
一直以来都只是c程序员，对c++知之甚少。这里进行数类的运算，使用c++，用重载运算符实现比较自然。使用GMP时，又感到用c库 比c++移植性好。有一次发现第3个程序很快耗用内存太大，且不断增长。调试后发现少量把malloc/free改成new/delete的代码导致了这个问题，这还 不是内存泄漏，关闭进程后内存马上恢复了，但运行时这样的内存耗用下去马上程序就无法运行了，似乎new的内存delete后还没有 立即交还给OS，而free则立即交还了。由于程序要持续进行大量计算，不发生内存泄漏对程序是至关重要的。
自己实现下来用了少量代码取得了与GMP运算一致的结果，效果还不错。GMP用分数形式，比我用小数形式大大拓展了运算范围，当然， 算法更复杂了。我此处的算法只有乘法和加法，只适用于计算Mandelbrot集（不知是否适用于计算Julia集），其他分形计算不一定够用。
除了Win/VC，也准备在Linux/GTK上实现。
本想能在ReactOS上发布程序最好。但我在虚拟机上试用了ReactOS，其兼容性和稳定性都还不行。 ……
（附及：MPFR的精度是指二进制精度，这与我的float小数实现用的10进制精度匹配的话可能有点问题。）