基态原子不辐射（电磁波）吗？

量子物理中，玻尔的量子论的基本原理之一就是说：原子在基态等定态不辐射。电动力学的教科书也说：“原子处于基态时是稳定的，不会产生 辐射，这点是和经典理论（经典电动力学）有深刻矛盾的”。原因是按卢瑟福原子模型，电子在其中作加速近圆周运动，会不断辐射电磁波，在 极短时间内就要损失全部能量，使这一模型不稳定而崩溃。算了一下，假设氢原子电子在n=1的玻尔半径上圆周运动，圆频率为10^{16}数量级 ††，如果电子象经典电动力学说的辐射，且以这个频率辐射电磁波，这个频率是高频，在可见光高频范围之上，对应波长为数百Å（原子线度是1Å，可见光波长约为数千Å）。《新概念物理 量子物理》中说道:“如果没有能量补充，电子的轨道将 不断缩小，最后被吸引到原子核上面去”。

浏览了一些《伯克利物理学教程第三卷 波动学》、MIT《振动与波》的内容，了解到不独量子力学，机械振动也有本征态的概念，比如驻波态。 于是就问：（从）非驻波态能不能变成驻波态；驻波本征态之间的变化；如何从非驻波态形成驻波态（比如反射）；一个驻波本征态如何 变为非（该）本征态并变为另一个驻波本征态。

一般的说法，驻波没有能量的传播。应该说是驻波不吸收/释放**净能量**。《新概念物理 力学》中说道“怎样……形成驻波？通常靠反射。” 振动波的能量传播透不过势垒，波被势垒完全反射回来，于是叠加形成驻波。所以开始我想（比如H原子的例子）电子辐射的电磁波是否也有遇到什么 被势垒反射/散射的机制，然后被电子又吸收，从而我们处在势垒外面观察的结果，完全没有任何能量透射出来（于是以为玻尔的说法：基态的氢原子 不辐射）。

但是这种想法似乎离（我所知的）事实比较远。考察电子所处的环境，电子向外辐射电磁波，没听说有什么会将电子辐射的电磁波反射回去的。 即便有，电子又怎么能恰巧将其完全吸收？这种图象比较奇异（或许电磁阻尼可以考虑）。但考察电子所处的环境，我想到：现实中，带电粒子 （如电子）总是处于热辐射场中，因此要振动、吸收和辐射。于是我思索怎么了解电子从电磁场中吸收了多少（比如象考虑在黑体辐射腔内放H原子的 图象），这也是一些热辐射与热平衡方面的问题。翻了翻一些微波的书，似乎没找到。一天，读到吴大猷书中介绍的瑞利-金斯公式的推导，我觉得 找到了正好解决了我的问题的答案。

这个推导表明：电子从电磁场中吸收的能量能够恰好等于它辐射的能量。从而现在认为：原子电子在基态不一定不辐射，只是辐射与吸收平衡。

Rayleigh-Jeans公式

$$\boxed{\psi_\nu d\nu = \frac{8\pi kT}{c^3}\nu^2 d\nu}$$

读到吴大猷在他的著作《理论物理-量子论与原子结构》p18（附录2 Rayleigh-Jeans定律）中写道：

“

Rayleigh-Jeans定律亦可纯由电动力学得之。

据说Rayleigh在1900年根据能量均分定理导出了今天所知的Rayleigh-Jeans定律；在1905年Rayleigh和Jeans又给出了更完整的推导和微小修正。 我没找到原论文（谁能提供将非常感谢）。不知其论文是否用这里吴大猷所说的纯电动力学的方法。

一个一维单谐振子的辐射率为：

$\overline{p} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2a^2\omega^4}{3c^3}$（电动力学教科书）

$$\begin{aligned} p &= \frac{\omega_0^4(ea)^2}{3c^3} \\ &= \frac{2\omega_0^2e^2}{3mc^3}\epsilon, \qquad \epsilon = \frac{1}{2}m(a\omega_0)^2 \end{aligned} \tag{I-32/I-32a}$$

ϵ 为振子之能量。

兹计算一个单谐振子在电磁场吸收能量的率。设振子频率为ω_0，同(10)式，其在电场E之运动方程式为

未找到这里所说的(10)式。

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{e}{m}E_x \tag{I-33}$$

设在$0 \leqslant t \leqslant T$间，$\vec{E}$ 之x分量E_x可作Fourier变换如下

$$\begin{aligned} E_x(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\omega)e^{i\omega t}d\omega \\ f(\omega) &= \int_0^T E_x(t)e^{-i\omega t}dt \\ E_x(t) &= 0 \quad t<0 \quad t>T \end{aligned} \tag{I-34}$$

$E_x(t)$为一实数之条件为

$$f^*(\omega) = f(-\omega) \tag{I-35}$$

$E_y(t)$、$E_z(t)$分量亦同此。按电动力学，此电磁场之辐射能密度ψ为下列平均值（对时间作平均）

$(\psi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}w\,?)$

（密度对全空间体积平均？）（E_x，E_y，E_z ?）

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{1}{8\pi}\overline{(E^2+H^2)} = \frac{1}{4\pi}\overline{E^2} \\ &= \frac{3}{4\pi}\overline{E_x^2} \end{aligned} \tag{I-36}$$

由(34)式，即得：

((Sturm-Liouville问题也有名为Parseval等式的公式，见《古今数学思想》))

傅里叶变换有parseval等式

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(\omega)|^2d\omega = 2\pi\int_{-\infty}^{\infty}|g(x)|^2dx$$

$$\begin{aligned} \overline{E_x^2} &= \frac{1}{T}\int_0^T {E_x}^2 dt \\ &= \frac{1}{2\pi T}\int_0^T E_x dt\int_{-\infty}^{\infty} f(\omega)e^{i\omega t}d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi T}\int_{-\infty}^{\infty} f(\omega)d\omega\int_0^T E_x e^{i\omega t}dt \\ &= \frac{1}{2\pi T}\int_{-\infty}^{\infty} f(\omega)f^*(\omega)d\omega \\ &= \frac{1}{\pi T}\int_0^{\infty}|f(\omega)|^2d\omega \end{aligned}$$

故能量密度在ω与$\omega+d\omega$间者为$(\omega = 2\pi\nu)$

$$\begin{aligned} \psi_\omega &= \frac{3}{4\pi^2T}|f(\omega)|^2 \\ \text{或}\psi_\nu &= \frac{3}{2\pi T}|f(\nu)|^2 \end{aligned} \tag{I-37}$$

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{3}{4\pi^2T}\int_0^{\infty}|f(\omega)|^2d\omega\ ; \\ &= \int_0^{\infty}\psi_\omega d\omega \\ &= \int_0^{\infty}\psi_\nu d\nu \end{aligned}$$

(33)方程式之解为

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{e}{\omega_0 m}\int_0^t E_x(\xi)\sin\omega_0(t-\xi)d\xi \\ x(0) &= \dot{x}(0) = 0 \end{aligned} \tag{I-38}$$

得出这个方程式的这个解很厉害。我不知道这个方程是怎样解的；只会验证这个解，用数学分析中含参变量的积分的求导公式：

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dx}\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)dy \\ &= \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dy \\ &+ f[x,\beta(x)]\beta'(x) \\ &- f[x,\alpha(x)]\alpha'(x) \end{aligned}$$

E_x对振子每秒钟所作之功为

积分区域扩大为矩形

$$\begin{aligned} \Delta\omega &= \frac{e}{T}\int_0^T \dot{x}E_x dt \\ &= \frac{e^2}{mT}\int_0^T E_x(t)dt\int_0^t E_x(\xi)\cos\omega_0(t-\xi)d\xi \\ &= \frac{e^2}{mT}\int_0^T E_x(\xi)d\xi\int_\xi^T E_x(t)\cos\omega_0(t-\xi)dt \qquad \dagger \\ &= \frac{e^2}{2mT}\int_0^T E_x(t)dt\left\{\int_0^t + \int_t^T\right\}E_x(\xi)\cos\omega_0(t-\xi)d\xi \\ &= \frac{e^2}{4mT}\left\{\int_0^T E_x(t)e^{i\omega_0 t}dt\int_0^T E_x(\xi)e^{-i\omega_0\xi}d\xi + \int_0^T E_x(t)e^{-i\omega_0 t}dt\int_0^T E_x(\xi)e^{i\omega_0\xi}d\xi\right\} \\ &= \frac{e^2}{2mT}|f(\omega)|^2 \qquad \text{由}(34) \\ &= \frac{\pi e^2}{3m}\psi_\nu \qquad \text{由}(37) \end{aligned} \tag{I-39}$$

傅里叶变换实数形式：

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\cdot$$

$$\int_0^{\infty}d\omega\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\cos\omega(t-\tau)d\tau$$

在稳定状态下，单谐振子的辐射率(32)必与其吸收能率(39)相等，亦即

$$\psi_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\epsilon$$

如以古典物理之“能之等分配律”$\epsilon = kT$值用于此式，即得Rayleigh-Jeans定律。

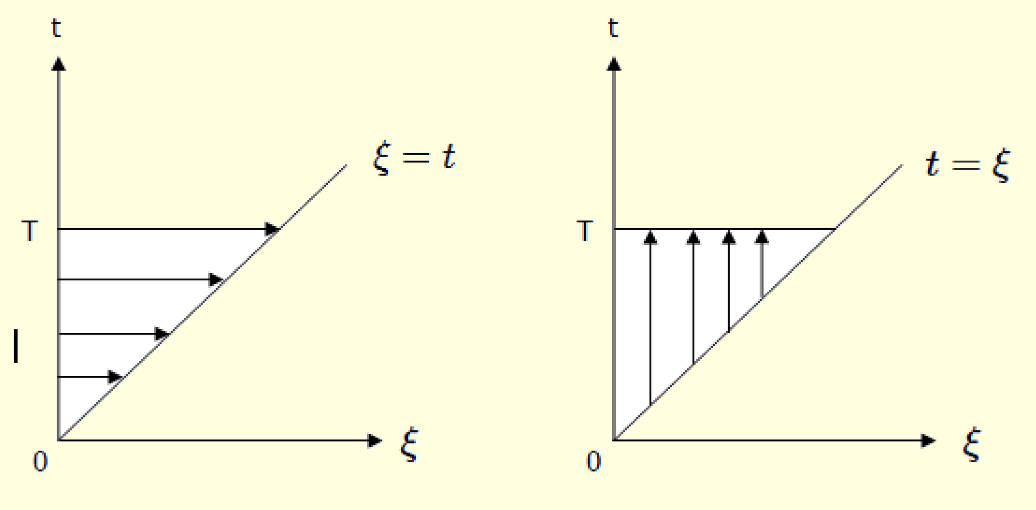
† 注： $\int_0^T E(t)dt\int_0^t E(\xi)\cos\omega(t-\xi)d\xi$ 积分乃左图横线之面积，
$\int_0^T E(\xi)d\xi\int_\xi^T E(t)\cos\omega(t-\xi)dt$ 积分则系右图竖线之面积。故上二式相等。

我使用的版本原文将后一式中的

$$E(t)\cos\omega(t-\xi)dt$$

误为

$$E(t)\cos\omega(t-\xi)d\xi$$



”

[参考]

《理论物理-量子论与原子结构》吴大猷
Men of Physics: Lord Rayleigh - The Man and his Work by Robert Bruce Lindsay
https://en.wikipedia.org/wiki/John_William_Strutt,_3rd_Baron_Rayleigh
https://en.wikipedia.org/wiki/Rayleigh-Jeans_law

对以上的内容自己作了一些计算来理解。

(1) 关于谐振子的辐射率
按照电动力学教科书里的公式，加速电荷的辐射功率

$$P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2}{3}\frac{e^2\dot{\vec{v}}^2}{c^3}$$

简谐振子的能量记为 $W = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 + \frac{1}{2}kz^2 = \frac{1}{2}ma^2\omega^2$ ，设 $z = a\cos\omega t$ ，则 $\vec{v} = \dot{z} = -a\omega\sin\omega t$，$\dot{\vec{v}} = \ddot{z} = -a\omega^2\cos\omega t$ ，故 $P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2}{3}\frac{e^2a^2\omega^4\cos^2\omega t}{c^3}$ 。
计算平均值$\frac{1}{T}\int_0^T\cos^2\omega t dt$ ，使用 $T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega}$ ，为$\frac{1}{2}$ ， 所以有$\overline{p} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2a^2\omega^4}{3c^3}$。比例因子为不同单位制之间的差异，故有原文 辐射率的式子。

(2) 关于(33)方程式之解的验算
如旁注，直接套公式即得：

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{e}{\omega_0 m}\int_0^t \omega_0 E_x(\xi)\cos\omega_0(t-\xi)d\xi + E_x(t)\sin\omega_0(t-t) \\ \ddot{x} &= \frac{e\omega_0}{\omega_0 m}\left[\int_0^t \omega_0 E_x(\xi)(-\sin\omega_0(t-\xi))d\xi + E_x(t)\cos\omega_0(t-t)\right] \end{aligned}$$

代入左端计算即得。

(3) (I-39)中一步的验算
将积分式

$$\int_0^T E_x(\xi)d\xi\int_\xi^T E_x(t)\cos\omega_0(t-\xi)dt$$

中的变量符号改变一下，不影响积分值，对换t与ξ

$$\int_0^T E_x(t)dt\int_t^T E_x(\xi)\cos\omega_0(\xi-t)d\xi$$

所以有中间那一步。

(4) 关于(I-37)式
还未很好地理解。疑为$\psi_\nu = \frac{3}{2\pi T}|f(\omega)|^2 = \frac{3}{2\pi T}|f(2\pi\nu)|^2$ ，后面(I-39)式的最后好象也支持这一点。

为什么我觉得找到答案了呢？该推导从辐射率与吸收率平衡出发，导出了Rayleigh-Jeans公式。好了，现在Rayleigh-Jeans定律成立（至少在 一定范围内（长波部分，低频？）成立），按照它来计算的话，自然将得到吸收率恰好等于辐射率；这正是我需要的。

推而广之，电子在任何本征态都不一定不辐射，只是辐射与吸收动态平衡。（而在激发态寿命很短的情况下，这一平衡是极其短暂的。激发本征态为什么很快向基态本征态迁移？机械振动似乎不是这样（？）。 激发本征态为什么不是（热）平衡态？）。 如果我有条件做实验，先着手这个方向去做。

††（套用一些公式：$m_e\frac{v^2}{r} = k\frac{e^2}{r^2}$， 取r为玻尔半径，$r = a_0 = 4\pi\epsilon_0\frac{\hbar^2}{m_e e^2}$ ， 于是可得 $v_0^2 = \frac{k^2e^4}{\hbar^2}$ ， 动能 $T = \frac{1}{2}m_e v^2 = \frac{1}{2}\frac{m_e k^2 e^4}{\hbar^2}$ ， 势能 $U = -k\frac{e^2}{r} = -k^2\frac{m_e}{\hbar^2}e^4$ ；
可见 $T = -\frac{1}{2}U$ 。 电子基态能量$-13.6eV = T + U = -T = \frac{1}{2}U$ 。用 $\frac{1}{2}m_e v_0^2 = 13.6eV$ 得： $v_0^2 = 2\times 13.6\cdot\frac{e}{m_e} = 2\times 13.6\cdot\frac{1.6\times 10^{-19}}{9.1\times 10^{-31}}$ ， 解得 $v_0 \approx 2.18\times 10^6(m/s)$ 。
或者用 $v_0^2 = \frac{k^2e^4}{\hbar^2}$ ， 从而 $v_0 = k\cdot\frac{e^2\cdot 2\pi}{h} = 9\times 10^9\cdot\frac{2.56\times 10^{-38}\cdot 6.28}{6.626\times 10^{-34}}$ ， 同样解得$v_0 \approx 2.18\times 10^6(m/s)$ 。
于是有$\omega_0 = \frac{v_0}{r} \approx 4\times 10^{16}$ (Hz)， 其中 $r = a_0 = 0.53\times 10^{-10}$ (m) ， 这个频率相应波长$\lambda = \frac{c}{\omega}\cdot 2\pi = c\cdot\frac{r}{v}\cdot 2\pi \approx 400\times 10^{-10}$ m 。 ）